

Tajemniczy ciąg w *Observationes cyclometricae* Adama Adamandego Kochańskiego

Henryk Fuks

Department of Mathematics
Brock University
St. Catharines, Ontario L2S 3A1, Kanada
Email: hfuks@brocku.ca

Streszczenie

W swojej znanej pracy z roku 1685 dotyczącej zagadnienia rektyfikacji okręgu, Adam Adamandy Kochański podał również zestaw wymiernych przybliżeń liczby π z nadmiarem i niedomiarem. Konstrukcja tych przybliżeń opiera się na ciągu liczb nazwanych *genitores*, którego początkowe wyrazy to 15, 4697, 5548, 14774. Kochański nie podał niestety metody tworzenia tego ciągu, zapowiadając jedynie, że zrobi to w zaplanowanej na przyszłość pracy *Cogitata & Inventa Polymathematica*, która jednakże nigdy nie ujrzała światła dziennego. W niniejszym opracowaniu odtwarzamy prawdopodobną metodę pozwalającą wygenerować *genitores*, ponadto opisujemy podstawowe własności ciągu przybliżeń π podanego przez Kochańskiego. Rozważamy również związek tych przybliżeń z ułamkami łańcuchowymi.

1. Wstęp

Problem odgadnięcia wzoru na ogólny wyrazu ciągu na podstawie jego pierwszych kilku wyrazów jest dobrze znany każdemu matematykowi, bo chyba każdy w swojej praktyce badawczej stanął choć raz w obliczu takiego zagadnienia. Może to być zadanie bardzo łatwe, tak jak np. odgadnięcie, że 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... to początek ciągu Fibonacciego. Może to również być problem zupełnie nieoczywisty, tak jak np. znalezienie ogólnego wyrazu ciągu o początkowych wyrazach 1, 2, 4, 10, 30, 106, 426, 1930, ... – zagadnienie, z którym niedawno musiał się zmierzyć autor [1]. Zagadki tego typu mają w sobie coś bardzo pociągającego chyba dla każdego, kto zawodowo zajmuje się matematyką. Jeżeli natomiast mamy do czynienia z początkowymi wyrazami ciągu, który pochodzi z pracy opublikowanej ponad trzysta lat temu, to problem staje się jeszcze wielokrotnie bardziej atrakcyjny.

Takim właśnie problemem jest sprawa intrygującego ciągu, którego pierwsze cztery wyrazy, t.j. 15, 4697, 5548, 14774, podał Adam Adamandy Kochański w swojej pracy z roku 1685 dotyczącej rektyfikacji okręgu. Ciąg ten posłużył mu do utworzenia wymiernych przybliżeń liczby π , jednak

ani wzoru na wyraz ogólny, ani nawet metody generowania kolejnych wyrazów Kochański nie podał. W niniejszym artykule dokonamy rekonstrukcji prawdopodobnego rozumowania, jakim posłużył się Kochański znajdując swoje przybliżenia liczby π , a zarazem odtworzymy algorytm, jakiego użył generując wspomniany ciąg.

„Postaci Adama Adamandego Kochańskiego przedstawiać nie trzeba” – tak chyba należałoby rozpocząć artykuł dotyczący osoby jedyne polskiego matematyka doby Rzeczypospolitej Obojga Narodów, który osiągnął światową sławę. Doświadczenie autora zdaje się jednak sugerować coś niestety zupełnie przeciwnego: nazwisko Kochańskiego pozostaje w dzisiejszych czasach w zasadzie całkowicie zapomniane, nawet wśród polskich matematyków, nie licząc oczywiście wąskiego grona historyków matematyki.

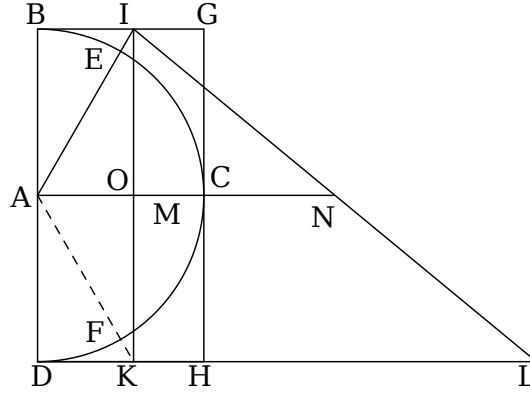
Jest to z pewnością sytuacja godna pożałowania, albowiem ks. Adam Adamandy Kochański SJ (1631–1700) był postacią wybitną, a w dodatku osobą o niezwykle różnorodnych zainteresowaniach. Matematyk, astronom i wynalazca, zajmował się również alchemią, filozofią, naukami humanistycznymi, a nawet językoznawstwem. Konstruktor zegarów i machin, prowadził prace nad udoskonaleniem mechanizmów zegarowych, stworzeniem mechanicznej maszyny obliczeniowej, jak również zbudowaniem *perpetuum mobile*.

Mimo tak bardzo wszechstronnych zainteresowań, stosunkowo niewiele dzieł Kochańskiego ukazało się w druku. Większość jego prac matematycznych zostało opublikowanych w wychodzącym w Lipsku czasopiśmie *Acta Eruditorum*, w latach 1682–1696. Ponadto Kochański pozostawił po sobie bardzo obfitą korespondencję, z której znane są obecnie 163 listy [2]. Wiele innych listów bądź zaginęło, bądź ciągle czeka na odkrycie w różnych archiwach i bibliotekach europejskich. Wśród korespondentów Kochańskiego byli tacy wybitni mu współcześni jak Gottfried Leibniz, Athanasius Kircher SJ, Jan Heweliusz, Gottfried Kirch, i wiele innych znaczących osobistości XVII wieku.

Po ponad trzech wiekach od śmierci Kochańskiego doczekaliśmy się wreszcie wyczerpującego studium jego biografii i osiągnięć, pióra ks. Bogdana Lisiaka SJ [3], jak również wydania reprintów całej jego ocalałej twórczości [4] i opublikowania wszystkich znanych listów [2]. Można mieć nadzieję, że przyczyni się to w jakimś stopniu do powrotu postaci Kochańskiego do zbiorowej świadomości.

Prace matematyczne Kochańskiego dotyczyły głównie geometrii, a zwłaszcza zagadnień takich jak kwadratura koła, trójwymiarowa wersja twierdzenia Pitagorasa, czy obliczanie długości boków wielokątów wpisanych w koło. Ponadto interesowały go kwadraty magiczne i ich modyfikacje, problem miary uniwersalnej, tablice logarytmiczne sinusów i tangensów, i wiele innych zagadnień. Największą sławę przyniosła mu jednak praca dotycząca rektyfikacji okręgu i przybliżeń liczby π , opublikowana w *Acta Eruditorum* w roku 1685 pod tytułem *Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accomodatae* [5]. Praca ta jest obecnie łatwo dostępna zarówno w formie reprintu [4], jak również w formie elektronicznej wraz z tłumaczeniem angielskim i przypisami opracowanymi przez autora [6].

Observationes cyclometricae nie jest pracą całkowicie jednolitą, albowiem zawiera w sobie trzy dość odrębne części. Część pierwsza dotyczy wymiennych przybliżeń liczby π , część druga podaje przybliżoną konstrukcję rektyfikacji okręgu, a część trzecia powraca raz jeszcze do zagadnienia przybliżenia π przez łatwą do geometrycznego skonstruowania liczbę wymienną. Przedmiotem niniejszego artykułu będzie właśnie część pierwsza *Observationes* i wspomniany już intrygujący ciąg liczb naturalnych, który się tam pojawia. Zanim jednak do tego przejdziemy, przed-



Rysunek 1: Konstrukcja Kochańskiego.

stawimy pokrótce wynik, dzięki któremu Kochański trafił do podręczników historii matematyki.

2. Rektyfikacja okręgu

W części drugiej *Observationes*, najczęściej komentowanej i cytowanej, Kochański przedstawił przybliżone rozwiązanie problemu rektyfikacji okręgu, t.j. skonstruowania za pomocą cyrkla i linijki odcinka o długości równej obwodowi danego okręgu. Zakładając, że okrąg ma średnicę 2, jest to oczywiście równoważne skonstruowaniu odcinka o długości π . Konstrukcja zaproponowana przez Kochańskiego przedstawiona jest na rysunku 1, w dokładnie takiej samej formie jak w oryginalnej pracy. Rozpoczynamy od narysowania półokręgu o promieniu AB ze środkiem w punkcie A , wpisanego w prostokąt $BGHD$. Rysujemy następnie linię AI taką, że $\angle IAC = 60^\circ$. Przedłużając dolny bok prostokąta tak, aby HL było równe średnicy okręgu, i rysując linię od I do L , uzyskujemy odcinek, którego długość, jak łatwo wykazać, wyraża się wzorem

$$|IL| = \frac{1}{3} \sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = 3.1415333 \dots \quad (1)$$

Wielkość ta zgadza się z rozwinięciem dziesiętnym liczby π w pierwszych czterech miejscach po przecinku. Powyższa konstrukcja, często reprodukowana bądź w oryginalnej, bądź w unowocześnionej i prostszej formie, zyskała sobie nazwę *konstrukcji Kochańskiego*.

Praca *Observationes cylometricae* nie kończy się jednak na opisie tej konstrukcji. Tytułem dodatku niejako (*epimetri loco*), Kochański podaje jeszcze przybliżenie liczby π w formie sumy wielokrotności i podwielokrotności $1/32$, a mianowicie

$$\pi \approx \frac{96}{32} + \frac{4}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32 \cdot 32} = \frac{3217}{1024} = 3.1416015625,$$

co zgadza się z π na pierwszych trzech miejscach po przecinku. Autor słusznie uznał taką dokładność za wystarczającą w zastosowaniach mechanicznych.

Konstrukcja Kochańskiego zdobyła mu uznanie w oczach współczesnych, a także miejsce w klasycznych podręcznikach historii matematyki, takich jak na przykład [7], [8], czy też [9], aby

wymienić tylko kilka. Jednak praktycznie nikt, o ile autorowi wiadomo, nie zainteresował się wynikiem uzyskanym przez Kochańskiego w pierwszej części *Observationes*, choć, jak zobaczymy poniżej, z dzisiejszego punktu widzenia jest to wynik może i ciekawszy niż przybliżona rektyfikacja okręgu.

3. Ciagi wymiernych przybliżeń liczby π

Pierwsza część *Observationes* jest jednocześnie częścią najobszerniejszą. Kochański przedstawia w niej dwa ciągi przybliżeń liczby π , z których jeden stanowią przybliżenia z niedomiarem, a drugi z nadmiarem. Pięć pierwszych wyrazów tych ciągów podanych jest w formie tabeli (str. 395 w [5] lub str. 2 w [6]). Używając współczesnego zapisu, przybliżenia te mają następującą postać.

$$\begin{aligned} \frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}, \\ \frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113}, \\ \frac{1667438}{530762} < \pi < \frac{1667793}{530875}, \\ \frac{9252915567}{2945294501} < \pi < \frac{9254583360}{2945825376}, \\ \frac{136727214560643}{43521624105025} < \pi < \frac{136736469144003}{43524569930401}. \end{aligned} \quad (2)$$

Jak to wspomniano w oryginalnej pracy, dwa spośród powyższych ułamków mogą być dalej skrócone, $\frac{1667438}{530762} = \frac{833719}{265381}$ i $\frac{9254583360}{2945825376} = \frac{96401910}{30685681}$, podczas gdy pozostałe są już zapisane w formie nieskracalnej. Oznaczmy ułamki pojawiające się po lewej stronie nierówności (2) jako P_n/Q_n , zaś te po prawej jako R_n/S_n , dzięki czemu zespół nierówności (2) będziemy mogli zapisać jako

$$\frac{P_n}{Q_n} < \pi < \frac{R_n}{S_n}, \quad (3)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, 3, 4$. W jaki sposób skonstruowane zostały ułamki P_n/Q_n i R_n/S_n , które nazwiemy tu, odpowiednio, n -tym *dolnym* i *górnym* przybliżeniem? Kochański daje na to odpowiedź, którą we współczesnym języku można opisać następująco. Przybliżenia konstruuje on rekurencyjnie, z użyciem równań

$$Q_{n+1} = S_n x_n + 1, \quad (4)$$

$$P_{n+1} = R_n x_n + 3, \quad (5)$$

$$S_{n+1} = S_n(x_n + 1) + 1, \quad (6)$$

$$R_{n+1} = R_n(x_n + 1) + 3, \quad (7)$$

przyjmując początkową wartość $R_0 = 22$, $S_0 = 7$. W powyższych wzorach x_n to n -ty wyraz pewnego ciągu liczb naturalnych, który Kochański określa jako *genitores*, podając pierwsze cztery wyrazy tego ciągu,

$$15, 4697, 5548, 14774. \quad (8)$$

Niesty, nie wyjaśnia, skąd ten ciąg się bierze, pisząc tylko:

Methodicam prædictorum Numerorum Synthesin in *Cogitatis, & Inventis Polymathematicis*, quæ, si DEUS vitam prorogaverit, utilitati publicæ destinavi, plenius exponam.¹

Cogitata & Inventa Polymathematica nigdy się jednak nie ukazały w druku. Być może istniały w rękopisie jakieś notatki dotyczące tego ciągu, ale wszystkie rękopisy Kochańskiego zgromadzone w Bibliotece Narodowej spłonęły w czasie Powstania Warszawskiego, kiedy to bibliotekę z premedytacją podpalili niemieccy okupanci.

Wg wiedzy autora, nikt nie próbował do tej pory odtworzyć algorytmu generującego *genitores*. W najbardziej wyczerpującej z opublikowanych do tej pory analiz twórczości matematycznej Kochańskiego [10], Z. Pawlikowska również nie podała wyjaśnienia tej zagadki.

W dalszej części artykułu spróbujemy odtworzyć najbardziej prawdopodobną metodę, którą mógł się posłużyć Kochański konstruując tajemniczy ciąg *genitorum*. Pokażemy również, że metoda ta pozwala skonstruować ciągi dolnych i górnych przybliżeń dążących w granicy do π , albo, w swej ogólniejszej formie, do dowolnej żądanej liczby niewymiernej. Rozważymy ponadto interesujący związek tej metody z uławkami łańcuchowymi, a także wyjaśnimy, dlaczego Kochański porzucił na czterech tylko wyrazach wspomnianego ciągu.

4. *Genitores* i ich konstrukcja

Czytając pierwsze strony *Observationes* zdaje się rozsądnym przypuścić, iż punktem startowym rozważań Kochańskiego było znane już od czasów Archimedesza przybliżenie π ułamkiem $22/7$. Kochański znał też dokładniejsze przybliżenia

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113}, \quad (9)$$

często przypisywane Metiusowi, w rzeczywistości pochodzące jednak od Szymona z Quercu [11, 12, 13]. Jest też możliwe, że Kochański zaobserwował, iż dolne przybliżenie Szymona z Quercu można otrzymać z przybliżenia Archimedesza używając konstrukcji znanej jako *proportionum intermedia*, czyli średnia proporcji. Średnia proporcji dwóch ułamków $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ zdefiniowana jest jako $\frac{a+b}{c+d}$. Ułamek $\frac{333}{106}$ okazuje się być średnią proporcji rozszerzenia $\frac{22}{7}$ i ułamka $\frac{3}{1}$,

$$\frac{333}{106} = \frac{22 \cdot 15 + 3}{7 \cdot 15 + 1}. \quad (10)$$

Skąd jednak bierze się tu czynnik 15? Kluczową obserwacją jest to, że 15 to czynnik niejako „optymalny”, będący największą liczną naturalną x , dla której wartość ułamka $\frac{22 \cdot x + 3}{7 \cdot x + 1}$ pozostaje mniejsza od π . Kochański łatwo mógł dojść do tego wniosku metodą prób i błędów.

Następną kluczową obserwacją jest fakt, że górne przybliżenie Szymona z Quercu można otrzymać w analogiczny sposób, zastępując tylko otrzymaną poprzednio liczbę 15 liczbą zwiększoną o jedność,

$$\frac{355}{113} = \frac{22 \cdot 16 + 3}{7 \cdot 16 + 1}. \quad (11)$$

¹Wyjaśnię pełniej metodę generowania powyższych liczb w *Cogitata & Inventa Polymathematica*, które to dzieło, jeśli Bóg życie przedłuży, przeznaczyłem ku pożytkowi publicznemu. (transl. H.F.)

Jeśli teraz zastosujemy taką samą procedurę do $\frac{355}{113}$ w miejsce $\frac{22}{7}$, to otrzymamy kolejną parę przybliżeń,

$$\frac{355 \cdot 4697 + 3}{113 \cdot 4697 + 1} = \frac{1667438}{530762}, \quad (12)$$

$$\frac{355 \cdot 4698 + 3}{113 \cdot 4698 + 1} = \frac{1667793}{530875}, \quad (13)$$

gdzie 4697, jak poprzednio, jest największą liczbą naturalną x dla której $\frac{355 \cdot x + 3}{113 \cdot x + 1} < \pi$. Łatwo sprawdzić, że rekursywne zastosowanie tej metody pozwala otrzymać ciągi przybliżeń (2), a liczby x otrzymywane w kolejnych krokach tworzą żądany ciąg *genitorum*.

Zauważmy, iż jest to metoda raczej prosta w swej istocie, i nie wymagająca niczego poza podstawowymi operacjami arytmetycznymi. Nawet wyznaczenie wartości x dla pierwszych kilku kroków jest jak najbardziej możliwe przy użyciu metody prób i błędów, i łatwo sobie wyobrazić, że Kochański, który był bardzo cierpliwym rachmistrzem (opracowywał wszakże ręcznie tablice logarytmów), mógł sobie z tym poradzić bez większych kłopotów.

Pozostaje teraz wykazać, że procedura powyższa istotnie generuje ciągi coraz lepszych przybliżeń liczby π , oraz że ciągi te dążą do π w granicy $n \rightarrow \infty$. Nie twierdzimy tu oczywiście, że Kochański znał formalne dowody tych faktów, tym bardziej, że formalne pojęcie granicy nie było wówczas znane. Dowody przytoczymy jedynie „dla kompletności wykładu”.

5. Zbieżność przybliżeń Kochańskiego

Metoda konstrukcji kolejnych przybliżeń liczby π opisana powyżej może być zastosowana w przypadku dowolnej dodatniej liczby niewymiernej, którą oznaczmy tu jako α .

Niech R i S będą liczbami naturalnymi takimi że $R/S > \alpha$. Łącznie z częścią całkowitą α , tu oznaczoną jako $\lfloor \alpha \rfloor$, spełniają one nierówność

$$\frac{\lfloor \alpha \rfloor}{1} < \alpha < \frac{R}{S}. \quad (14)$$

Lewą stronę powyższej podwójnej nierówności zapisaliśmy jako $\frac{\lfloor \alpha \rfloor}{1}$ w celu uwypuklenia faktu, że interesują nas przybliżenia liczby α w formie ułamków. Ułamki pojawiające się po lewej i prawej stronie tej nierówności możemy potraktować jako, odpowiednio, przybliżenia liczby α z niedomiarem i z nadmiarem.

Przypuśćmy, że chcemy teraz zacieśnić powyższą nierówność. Jak zaraz zobaczymy, można to osiągnąć obliczając średnią proporcji rozszerzenia przybliżenia z nadmiarem i przybliżenia z niedomiarem, tzn. rozważając ułamek w formie

$$\frac{Rx + \lfloor \alpha \rfloor}{Sx + 1}, \quad (15)$$

gdzie x jest pewną liczbą naturalną. Aby wyjaśnić to dokładniej, zauważmy najpierw, że funkcja $f(x) = \frac{Rx + \lfloor \alpha \rfloor}{Sx + 1}$, potraktowana jako funkcja zmiennej rzeczywistej x , ma dodatnią pochodną wszędzie poza $x = -1/S$, gdzie jest niezdefiniowana, i że istnieje x takie, że $f(x) = \alpha$, dane przez $x = (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)/(R - \alpha S)$. Mając to na uwadze, *genitor* Kochańskiego może być zdefiniowany jak następuje.

Definicja 1 Niech α będzie dodatnią liczbą niewymierną, i niech R, S będą liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $\frac{R}{S} > \alpha$. Genitor liczb R i S względem α definiujemy jako

$$g_\alpha(R, S) = \left\lfloor \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{R - \alpha S} \right\rfloor. \quad (16)$$

Zauważmy, że jeśli $g_\alpha(R, S) > 0$, to $g_\alpha(R, S)$ jest największą liczbą naturalną x spełniającą warunek $\frac{Rx + \lfloor \alpha \rfloor}{Sx + 1} < \alpha$, tzn.

$$g_\alpha(R, S) = \max\{x \in \mathbb{N} : \frac{Rx + \lfloor \alpha \rfloor}{Sx + 1} < \alpha\}. \quad (17)$$

Genitores znalezione przez Kochańskiego mogą teraz być zapisane w formie $g_\pi(22, 7) = 15$, $g_\pi(355, 113) = 4697$, $g_\pi(1667793, 530875) = 5548$, and $g_\pi(9254583360, 2945825376) = 14774$.

Używając powyższej definicji, możemy teraz zacieśnić nierówności (14).

Stwierdzenie 1 Jeżeli $\alpha \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^+$, $R, S \in \mathbb{Q}^+$, $\frac{R}{S} > \alpha$ i jeżeli genitor $g_\alpha(R, S)$ jest dodatni, to

$$\lfloor \alpha \rfloor < \frac{Rg_\alpha(R, S) + \lfloor \alpha \rfloor}{Sg_\alpha(R, S) + 1} < \alpha < \frac{R(g_\alpha(R, S) + 1) + \lfloor \alpha \rfloor}{S(g_\alpha(R, S) + 1) + 1} < \frac{R}{S}. \quad (18)$$

Druga i trzecia nierówność są prostą konsekwencją definicji $g_\alpha(R, S)$ i równania (17). Pierwsza nierówność może zostać udowodniona następująco. Ponieważ $R/S > \alpha$, mamy $R/S > \lfloor \alpha \rfloor$, i dlatego $Rg_\alpha(R, S) > \lfloor \alpha \rfloor Sg_\alpha(R, S)$. Wynika stąd, iż

$$Rg_\alpha(R, S) + \lfloor \alpha \rfloor > \lfloor \alpha \rfloor Sg_\alpha(R, S) + \lfloor \alpha \rfloor,$$

i

$$\frac{Rg_\alpha(R, S) + \lfloor \alpha \rfloor}{Sg_\alpha(R, S) + 1} > \lfloor \alpha \rfloor,$$

jak było wymagane. Aby pokazać ostatnią nierówność zauważmy, że

$$\frac{R(g_\alpha(R, S) + 1) + \lfloor \alpha \rfloor}{S(g_\alpha(R, S) + 1) + 1} - \frac{R}{S} = \frac{\lfloor \alpha \rfloor S - R}{S(S(g_\alpha(R, S) + 1) + 1)}.$$

Ponieważ $R/S > \lfloor \alpha \rfloor$, licznik musi być ujemny, skąd wynika ostatnia nierówność (18). $\square$

Powyższy wynik umożliwia nam zacieśnienie nierówności (14), więc następnym logicznym krokiem jest rekursywne zastosowanie tegoż zacieśniania. Możemy teraz formalnie zdefiniować algorytm generujący kolejne, coraz dokładniejsze wymierne przybliżenia liczby α .

Definicja 2 Niech $\alpha \in \mathbb{I}\mathbb{Q}^+$ i niech R_0, S_0 będą liczbami naturalnymi takimi, że $R_0/S_0 > \alpha$ i $g_\alpha(R_0, S_0) > 0$. Przybliżenia Kochańskiego liczby α rozpoczynające się od R_0, S_0 to ciągi liczb wymiernych $\{P_n/Q_n\}_{n=1}^\infty$ i $\{R_n/S_n\}_{n=0}^\infty$ zdefiniowane rekursywnie dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ przez równania

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= R_n x_n + \lfloor \alpha \rfloor, \\ Q_{n+1} &= S_n x_n + 1, \\ R_{n+1} &= R_n(x_n + 1) + \lfloor \alpha \rfloor, \\ S_{n+1} &= S_n(x_n + 1) + 1, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie $x_n = g_\alpha(R_n, S_n)$. Elementy ciągu $\{P_n/Q_n\}_{n=1}^\infty$ będą nazywane dolnymi przybliżeniami, a elementy ciągu $\{R_n/S_n\}_{n=0}^\infty$ – górnymi przybliżeniami.

Zauważmy natychmiast, że

$$P_n = R_n - R_{n-1}, \quad (20)$$

$$Q_n = S_n - S_{n-1}, \quad (21)$$

dlatego wystarczy nam ograniczyć się do rozważania ciągów R_n i S_n . Mając R_n i S_n możemy łatwo utworzyć zarówno dolne, jak i górne przybliżenia.

Stwierdzenie 2 *Przybliżenia Kochańskiego mają następujące własności:*

- (i) x_n jest ciągiem niemalejącym o dodatnich wyrazach,
- (ii) $\lfloor \alpha \rfloor < \frac{P_n}{Q_n} < \alpha < \frac{R_n}{S_n} < \frac{R_0}{S_0}$ dla każdego $n \geq 1$,
- (iii) $\frac{R_n}{S_n}$ jest ciągiem malejącym,
- (iv) $\frac{P_n}{Q_n}$ jest ciągiem rosnącym,
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$.

Dla wykazania (i), ponieważ $x_n = g_\alpha(R_n, S_n)$ jest zdefiniowane jak w równaniu (16), należy wykazać, że $R_n - \alpha S_n$ jest nierosnący. Aby to zrobić, zbadajmy znak wyrażenia

$$\begin{aligned} R_n - \alpha S_n - (R_{n+1} - \alpha S_{n+1}) &= R_n - \alpha S_n - (R_n(x_n + 1) + \lfloor \alpha \rfloor) \\ &\quad + \alpha(S_n(x_n + 1) + 1) = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor - (R_n - \alpha S_n)x_n \\ &= \alpha - \lfloor \alpha \rfloor - (R_n - \alpha S_n) \left\lfloor \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{R_n - \alpha S_n} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie, na mocy definicji operatora $\lfloor \cdot \rfloor$, musi być nieujemne, dlatego ciąg $R_n - \alpha S_n$ jest nierosnący, a zatem x_n jest niemalejący. Ponieważ definicja przybliżeń Kochańskiego wymaga, aby x_0 było dodatnie, wszystkie pozostałe wartości x_n muszą również być dodatnie.

Własność (ii) jest konsekwencją Stwierdzenia 1, co staje się jasne, gdy zauważymy, że

$$\frac{R_n}{S_n} = \frac{R_{n-1}(x_{n-1} + 1) + 3}{S_{n-1}(x_{n-1} + 1) + 1},$$

jak również

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{R_{n-1}x_{n-1} + 3}{S_{n-1}x_{n-1} + 1},$$

gdzie $x_{n-1} = g_\alpha(R_{n-1}, S_{n-1})$.

Aby pokazać (iii), obliczmy różnicę dwóch kolejnych wyrazów ciągu R_n/S_n ,

$$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{R_{n-1}y_{n-1} + \lfloor \alpha \rfloor}{S_{n-1}y_{n-1} + 1} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}},$$

gdzie definiujemy $y_{n-1} = g_\alpha(R_{n-1}, S_{n-1}) + 1$. Dzięki temu uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} &= \frac{(R_{n-1}y_{n-1} + \lfloor \alpha \rfloor)S_{n-1} - R_{n-1}(S_{n-1}y_{n-1} + 1)}{S_{n-1}(S_{n-1}y_{n-1} + 1)} \\ &= \frac{\lfloor \alpha \rfloor S_{n-1} - R_{n-1}}{S_{n-1}(S_{n-1}y_{n-1} + 1)} < 0, \end{aligned}$$

ponieważ, na mocy (ii), $R_{n-1}/S_{n-1} > \lfloor \alpha \rfloor$. Ciąg R_n/S_n jest więc malejący. Dowód własności (iv) jest bardzo podobny i dlatego go pominiemy.

Zauważmy teraz, że R_n/S_n jest ograniczony z dołu przez α i malejący, a więc musi być zbieżny. Podobnie, $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{R_n - R_{n-1}}{S_n - S_{n-1}}$ jest ograniczony z góry przez α i rosnący, więc również zbieżny. Aby udowodnić (v), wystarczy więc pokazać, że granice ciągów $\frac{R_n}{S_n}$ i $\frac{R_n - R_{n-1}}{S_n - S_{n-1}}$ są równe, albo, co jest równoważne, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_n - R_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} \right) = 0. \quad (22)$$

Zacniemy od zdefiniowania $\gamma_n = R_n/S_n - P_n/Q_n$ i zaobserwowania, że

$$\gamma_n = \frac{R_n}{S_n} - \frac{R_n - R_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \frac{R_{n-1}S_n - R_nS_{n-1}}{S_n(S_n - S_{n-1})}.$$

Podstawiając $R_n = R_{n-1}(x_{n-1} + 1) + \lfloor \alpha \rfloor$ i $S_n = S_{n-1}(x_{n-1} + 1) + 1$, otrzymujemy po uproszczeniu

$$\gamma_n = \frac{R_{n-1} - \lfloor \alpha \rfloor S_{n-1}}{S_n(S_n - S_{n-1})} = \frac{\frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} - \lfloor \alpha \rfloor}{S_n(\frac{S_n}{S_{n-1}} - 1)}. \quad (23)$$

Ponieważ ciąg R_n/S_n jest malejący, a jego początkowy wyraz to R_0/S_0 , możemy napisać

$$\gamma_n < \frac{\frac{R_0}{S_0} - \lfloor \alpha \rfloor}{S_n(\frac{S_n}{S_{n-1}} - 1)} = \frac{\frac{R_0}{S_0} - \lfloor \alpha \rfloor}{S_n(x_{n-1} + \frac{1}{S_{n-1}})}, \quad (24)$$

gdzie użyliśmy podstawienia $S_n = S_{n-1}(x_{n-1} + 1) + 1$ i gdzie $x_{n-1} = g_\alpha(R_{n-1}, S_{n-1})$. Ponieważ ciąg x_n jest niemalejący, a S_n rosnący, wnioskujemy, że $\gamma_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$, co należało pokazać.

□

Zauważmy jeszcze, że ciąg x_n jest tylko niemalejący, i może się zdarzyć, że dwie kolejne wartości x_n będą takie same. Dla przykładu, gdy $\alpha = \sqrt{2}$ i $R_0/S_0 = 3/2$, otrzymujemy

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty = 2, 4, 4, 15, 17, 77, 101, 119, \dots,$$

a zatem w tym przypadku $x_1 = x_2$.

6. Wartości początkowe

Pozostaje nam jeszcze do wyjaśnienia sprawa wyboru wartości początkowych R_0, S_0 . Definicja 2 wymaga aby *genitor* tych wartości był dodatni, jak więc wybrać R_0, S_0 aby ten warunek był

spełniony? Zauważmy najpierw, że druga w kolejności para przybliżeń $(\frac{333}{106}, \frac{355}{113})$ pojawia się również jako redukt rozwinięcia π w ułamek łańcuchowy. Nie jest to bynajmniej przypadek, jak zaraz zobaczymy.

Przypomnijmy najpierw dwie istotne własności rozwinięcia dodatniej liczby niewymiernej α w ułamek łańcuchowy

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}.$$

Reduktem p_n/q_n nazywamy ułamek (w nieskracalnej formie) otrzymany przez pominięcie w powyższym ułamku łańcuchowym wszystkich „pięter” poniżej a_n . Pierwszą własnością, którą przypomnimy będzie algorytm pozwalający na otrzymanie reduktów i liczb a_n rozwinięcia łańcuchowego.

Stwierdzenie 3 Kolejne reduktu p_n/q_n liczby α można otrzymać stosując rekursywnie równania

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}{p_n - \alpha q_n} \right\rfloor, \quad (25)$$

$$p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1}, \quad (26)$$

$$q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}, \quad (27)$$

z wartościami początkowymi $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $a_1 = \lfloor \frac{1}{\alpha - a_0} \rfloor$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

Dla przykładu, stosując ten algorytm dla $\alpha = \pi$, otrzymujemy

$$\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381}, \frac{1146408}{364913}, \frac{4272943}{1360120}, \dots \right\} \quad (28)$$

Redukty można uznać za najlepsze wymierne przybliżenia liczb niewymiernych, co formalnie wyraża się jak następuje.

Stwierdzenie 4 Jeżeli p_n/q_n jest reduktu liczby niewymiernej α , a p/q jest dowolnym ułamkiem spełniającym $q < q_{n+1}$, to

$$|q_n \alpha - p_n| < |q \alpha - p|. \quad (29)$$

Elementarne dowody obydwu powyższych stwierdzeń można znaleźć np. w [14]. Zauważmy również, że kolejne reduktu p_n/q_n są na przemian większe i mniejsze od α , a dokładniej, dla nieparzystych n mamy zawsze $p_n/q_n > \alpha$, podczas gdy dla parzystych n , $p_n/q_n < \alpha$. Rozważmy teraz jakiś nieparzysty redukt p_{2k+1}/q_{2k+1} , i niech $p = \lfloor \alpha \rfloor$, $q = 1$. Nierówność (29) przyjmuje wówczas postać

$$p_{2k+1} - \alpha q_{2k+1} < \alpha - \lfloor \alpha \rfloor, \quad (30)$$

a stąd

$$\frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{p_{2k+1} - \alpha q_{2k+1}} > 1. \quad (31)$$

Przywołując definicję *genitoris* daną równaniem (16), otrzymujemy $g_\alpha(p_{2k+1}, q_{2k+1}) > 0$, co prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 1 *Jeżeli p_{2k+1}/q_{2k+1} jest nieparzystym reduktom liczby niewymiernej α , to spełniony jest warunek $g_\alpha(p_{2k+1}, q_{2k+1}) > 0$, a zatem $R_0 = p_{2k+1}$, $S_0 = q_{2k+1}$ mogą być użyte jako wartości początkowe w konstrukcji przybliżeń Kochańskiego. W szczególności, przybliżenia Kochańskiego mogą być wygenerowane zaczynając od pierwszego reduktu liczby α , biorąc $R_0 = a_0 a_1 + 1$ i $S_0 = a_1$, gdzie $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, $a_1 = \lfloor 1/(\alpha - a_0) \rfloor$.*

Zauważmy, że Kochański w swojej pracy istotnie przyjął jako początkowe przybliżenie pierwszy redukt π , biorąc $R_0/S_0 = 22/7$. Naturalnie, jeśli rozpoczniemy od pierwszego reduktu zakładając $R_0 = p_1$, $S_0 = q_1$, to pierwsze dolne przybliżenie Kochańskiego będzie jednocześnie drugim reduktom, $P_1 = p_2$, $Q_1 = q_2$, co faktycznie ma miejsce w pracy Kochańskiego, gdzie $P_1/Q_1 = p_2/q_2 = 333/106$. Pozostałe przybliżenia nie muszą być reduktom, i zwykle nie są, aczkolwiek może się zdarzyć, że redukty pojawią się w ciągu przybliżeń górnych lub dolnych. Dla przykładu, gdy $\alpha = \pi$, otrzymujemy $R_1/S_1 = p_3/q_3 = 355/113$ jak również $P_2/Q_2 = p_8/q_8 = 833719/265381$.

Należy tu również dodać, że wybór pierwszego reduktu jako początkowej wartości przy tworzeniu przybliżeń Kochańskiego jest najbardziej naturalnym wyborem. Spośród wszystkich par R_0, S_0 gdzie $S_0 < 106$, jedynymi przypadkami dla których $g_\pi(R_0, S_0) > 0$ są $R = 22k$, $S = 7k$, gdzie $k \in \{1, 2, \dots, 15\}$. Jeśli chcemy otrzymać ułamki wyrażone jak najmniejszymi liczbami naturalnymi, to $k = 1$ jest oczywistym wyborem.

7. Uwagi końcowe

Przedstawiliśmy rekonstrukcję algorytmu pozwalającego utworzyć ciągi wymiernych przybliżeń liczby π , których początkowe wyrazy ogłosił Kochański w swojej pracy [5]. Pokazaliśmy również, że analogiczne ciągi można utworzyć dla dowolnej liczby niewymiernej. Przy właściwym wyborze wartości początkowych, ciągi te zbieżne są do liczby, którą mają przybliżać.

Używając tych wyników, możemy teraz wygenerować znacznie większą liczbę wyrazów ciągu *genitorum* dla $\alpha = \pi$, zakładając $R_0/S_0 = 22/7$,

$$\{x_n\}_{n=0}^\infty = \{g_\pi(R_n, S_n)\}_{n=0}^\infty = \{15, 4697, 5548, 14774, 33696, 61072, 111231, 115985, 173819, 563316, 606004, \dots\}. \quad (32)$$

Proponujemy nazwać ten ciąg *ciągami Kochańskiego*. Właściwe hasło zostało już utworzone w „Online Encyclopedia of Integer Sequences”, gdzie ciąg ten otrzymał numer A191642 [15]. W tejże encyklopedii czytelnik znajdzie krótkie programy w Maple i Pari pozwalające wygenerować dowolną liczbę wyrazów, jak również pierwsze 1000 wyrazów ciągu.

Wiedząc, że $x_n = \left\lfloor \frac{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}{R_n - \alpha S_n} \right\rfloor$, możemy teraz zrozumieć, dlaczego praca Kochańskiego zawiera tylko cztery *genitores*. Aby obliczyć x_n , należy znać π z wystarczającą dokładnością. Na przykład, potrzeba znać 20 cyfr po przecinku w rozwinięciu π aby móc obliczyć x_0 do x_3 .

Kochański znał wynik Ludolpha van Ceulena, który obliczył 35 cyfr rozwinięcia π , co było więcej niż wystarczające do obliczenia x_4 . Jednakże Kochański w swojej pracy, co widać w zamieszczonych tam tabelach, wykonywał wszystkie obliczenia zachowując „tylko” 25 znaczących cyfr, a to było o jedną cyfrę za mało aby móc obliczyć x_4 .

Interesującym jest również porównanie definicji 2 i algorytmu pozwalającego otrzymać reduktę p_n/q_n przedstawionego w Stwierdzeniu 3. Kochański zawsze dodawał 3 i 1 do licznika i mianownika swoich przybliżeń, ponieważ, jak napisaliśmy wcześniej, zaważył, że

$$\frac{22 \cdot 15 + 3}{7 \cdot 15 + 1} = \frac{333}{106}, \quad \frac{22 \cdot 16 + 3}{7 \cdot 16 + 1} = \frac{355}{113}. \quad (33)$$

Nie zauważył niestety, że

$$\frac{333 \cdot 1 + 22}{106 \cdot 1 + 7} = \frac{355}{113}, \quad (34)$$

co znaczy, że zamiast szukać największego x dla którego $(22x + 3)/(7x + 1) < \pi$, można wziąć poprzednie dwa przybliżenia, $22/7$ and $333/106$, i szukać największego x takiego, że $(333x + 22)/(106x + 7) > \pi$. Gdyby to zrobił, byłby otrzymał reduktę i, być może, odkrył ułamki łańcuchowe. Jego *genitores* byłyby wówczas wartościami a_n w rozwinięciu π w ułamek łańcuchowy. Ponieważ tak się jednak nie stało, ułamki łańcuchowe musiały poczekać do r. 1695, kiedy to John Wallis przedstawił podstawy ich teorii w swoim dziele *Opera Mathematica* [16].

Pozostaje do wyjaśnienia jeszcze jeden zagadkowy szczegół. W definicji 2 zauważyć możemy, że przybliżenie P_n/Q_n zaczyna się od $n = 1$, a nie od $n = 0$, jak to ma miejsce w przypadku R_n/S_n . Istotnie, wartości P_0 i Q_0 nie są wcale potrzebne do rozpoczęcia rekursji. Pomimo tego, w pracy Kochańskiego w drugim rzędzie tabeli przybliżeń π można znaleźć parę przybliżeń odpowiadających $n = 0$, mianowicie $P_0/Q_0 = 25/8$. Liczby te nie są potrzebne do dalszych obliczeń, i Kochański nie wyjaśnia, w jakim celu umieścił je w tabeli. Możemy tylko spekulować, że chciał, aby tabela wyglądała „symetrycznie”, dlatego wstawił tam jakiś arbitralny ułamek przybliżający π z niedomiarem.

8. Podziękowania

Autor składa podziękowanie dla Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) za częściowe wsparcie finansowe w ramach programu Discovery Grant. Pragnie również podziękować prof. Danucie Makowiec za pomoc w pozyskaniu potrzebnej literatury, a ks. Bogdanowi Lisiakowi SJ za informacje dotyczące A. A. Kochańskiego i jego prac.

Literatura

- [1] H. Fukś and K. Sullivan, “Enumeration of number-conserving cellular automata rules with two inputs,” *Journal of Cellular Automata* **2** (2007) 141–148.
- [2] B. Lisiak SJ and L. Grzebień SJ, *Korespondencja Adama Adamandego Kochańskiego SJ (1657–1700)*. Wydawnictwo WAM, Kraków, 2005.

- [3] B. Lisiak SJ, *Adam Adamandy Kochański (1631–1700). Studium z dziejów filozofii i nauki w Polsce XVII wieku*. Wydawnictwo WAM, Kraków, 2005. In Polish.
- [4] A. A. Kochański, *Opuscula*. Wydawnictwo WAM, Kraków, 2003.
- [5] A. A. Kochański, “Observationes cyclometricae ad facilitandam praxin accomodatae,” *Acta Eruditorum* **4** (1685) 394–398.
- [6] H. Fukś, “Observationes cyclometricae by Adam Adamandy Kochański – Latin text with annotated English translation,” 2011. <http://arxiv.org/abs/1106.1808>.
- [7] J. E. Montucla, *Histoire Des Recherches Sur La Quadrature Du Cercle*. Jombert, Paris, 1754.
- [8] M. Cantor, *Vorlesungen über Gesichte der Mathematic*. B. G. Teubner, Leipzig, 1880.
- [9] S. Günther, A. Braunmühl, and H. Wieleitner, *Geschichte der Mathematik*. G. J. Göschen, Leipzig, 1921.
- [10] Z. Pawlikowska, “Adam Adamandy Kochański i jego prace matematyczne,” *Rocznik Pol. Tow. Mat.* **11** (1969) 19–49.
- [11] A. Metius, *Adriani Metii Alcmariano arithmeticae libri duo, et geometriae libri VI*. Leiden, 1626.
- [12] W. Więśław, “Adrian z Metzu – π po raz dziewiąty,” *Matematyka* **5** (2001) 270–271.
- [13] W. Więśław, “Squaring the circle in XVI–XVIII centuries,” in *Mathematik im Wandel*, M. Toepell, ed., vol. 4, pp. 127–139. 2009.
- [14] H. S. Wall, *Analytic Theory Of Continued Fractions*. Chelsea, New York, 1967.
- [15] OEIS Foundation Inc., “The on-line encyclopedia of integer sequences.” <http://oeis.org/A191642>.
- [16] J. Wallis, *Opera Mathematica*. E Theatro Sheldoniano, Oxoniae, 1695.